令和７年(2025年)08月30日

『基礎数学講座 第 8 巻　微分方程式』占部　実著（共立出版 1958）

本ホームページの制作経緯

　もう50年以上前のことであるが、私は学生の頃に上掲書を買い勉強した。
今般75歳になって(1949年生)改めて読み返している。本書には演習問題と解は
記載されているが計算過程は記載されていない。ネット上を探してみたが見つから
なかった。それで自分で解いた解法を公開しようと思い法的な問題がないか出版社と
協議を重ねた結果、特に問題はないということだったので公開することにした。

以下に参考にした本とホームページを掲げ、謝意を表す。
『基礎数学講座 第 8 巻　微分方程式』占部　実著（共立出版 1958）

工業大学生ももやまのうさぎ塾　うさぎでもわかる微分方程式
https://www.momoyama-usagi.com/entry/math-ode13

【全９パターン網羅】微分方程式の解法一覧
　https://ushitora.net/archives/3530#toc7

微分方程式演習
　https://brain.cc.kogakuin.ac.jp/~kanamaru/lecture/difeq/

【微分方程式】ダランベール型（ラグランジュ型）の解法
　https://batapara.com/archives/lagrange-differential-equation.html/

変数係数２階線形微分方程式の解法
　https://physnotes.jp/diffeq/2nd-lde/

本編を書くに当たり下記のパソコンを使用した。コンピューターの世界は変化が早い
のですぐに忘れ去られるであろう。記録しておくことに意味はあると考える。

NEC製　Versapro　PC-VJ24FLW　リナックス　Lubuntu24.04
東芝製　Dnabook　EX66MBRS　Windows11　home　24H2
使用したアプリ　Libreoffice24.2　Writer（ワープロ）　Math（数式作成）

在学中教授頂いた母校、鹿児島工業高等専門学校数学科の先生方に本編を捧ぐ

演習問題　２　　25 ページ
1.次の微分方程式の一般解を求めよ

(1) $x\sqrt{(1+y^2)}\,dx+y\sqrt{(1+x^2)}\,dy=0$　　**解：** $\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+y^2)}=C$

変数分離形にするために　$\sqrt{(1+y^2)}\sqrt{(1+x^2)}$　で割ると

$$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}dx+\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}}=0$$

積分して２倍すると　$\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+y^2)}=C$　となる

(2) $xy'=\frac{y(1+y^2)}{1+x^2}$　　**解：** $y^2=\frac{Cx^2}{1+(1-C)x^2}$

変数分離形にするために　$xy(1+y^2)$　で割ると

$$\frac{dy}{y(1+y^2)}=\frac{dx}{x(1+x^2)}\qquad \left(\frac{1}{y}-\frac{y}{1+y^2}\right)dy=\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

２倍して積分すると　$\log(\frac{y^2}{1+y^2})=C_1+\log(\frac{x^2}{1+x^2})$　　$\frac{y^2}{1+y^2}=C_2\frac{x^2}{1+x^2}$

$$1+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_2x^2}\qquad \frac{1}{y^2}=\frac{1-C_2}{c_2}+\frac{1}{C_2x^2}\qquad y^2=\frac{C_2x^2}{1+(1-C_2)x^2}$$

$$y^2=\frac{Cx^2}{1+(1-C)x^2}$$

(3) $y'=3e^{(x+2y)}$　　**解：** $y=-\frac{1}{2}\log(C-6e^x)$

$$\frac{dy}{dx}=3e^{x+2y}\qquad e^{-2y}dy=3e^x dx$$

積分すると　$\frac{-1}{2}e^{-2y}=C_1+3e^x$　　$e^{-2y}=C_2-6e^x$　　$-2y=\log(C_2-6e^x)$

解：　$y=-\frac{1}{2}\log(C-6e^x)$

(4) y'=cos(x-y)-cos(x+y)　　　**解：**　$y=2\tan^{-1}\left(Ce^{-2\cos x}\right)$

$$y'=cosx\,cosy+sinx\,siny-(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=2\sin x\sin y$$

$\dfrac{dy}{\sin y}=2\sin x\,dx$　$t=\tan\dfrac{y}{2}$　とおくと

$\sin y=\dfrac{2t}{1+t^2}$　$\cos y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　$dy=\dfrac{2}{1+t^2}dt$　であるから 積分すると

$$\int\frac{1}{\sin y}dy=\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=C_1+\log t=C_1+\log\left(\tan\frac{y}{2}\right)=\int 2\sin x\,dx=-2\cos x$$

$$\tan\frac{y}{2}=C_2e^{-2\cos x}$$

(5)　$(x^2+y^2)\,dx+xy\,dy=0$　　　**解：**　$x^2(2y^2+x^2)=C$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+y^2}{xy}$　同次形であるから y=ux とおく　y'=u'x+u であるから

$u+x\dfrac{du}{dx}=-u-\dfrac{1}{u}$　$x\dfrac{du}{dx}=-2u-\dfrac{1}{u}=\dfrac{-(2u^2+1)}{u}$

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{-udu}{2u^2+1}$　$4\log x+\log(2u^2+1)=C_1$　$x^2(2u^2x^2+x^2)=C_2$　$x^2(2y^2+x^2)=C_2$

解：　$x^2(2y^2+x^2)=C$

(6)　$(x-y+1)y'+3x+y-5=0$　　　**解：**　$(x+y-3)(3x-y-1)=C$

$(x-y+1)dy+(3x+y-5)dx=0$　$(xdy+ydx)+(-y+1)dy+(3x-5)dx=0$

(xy)'=xdy+ydx であるから２倍して積分すると

$2xy-y^2+2y+3x^2-10x=C$　これを２項の積の形式にするには

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$　であることに留意して

$-y^2+2y(x+1)-(x+1)^2+(x+1)^2+3x^2-10x=-(y-x-1)^2+4x^2-8x+1$

$(2x-2)^2-(y-x-1)^2-3=(x+y-3)(3x-y-1)-3$

解：　$(x+y-3)(3x-y-1)=C$

(7) $xy'=\sqrt{x^2+y^2}$　　　**x,y 表示した解：**　$Cx^3=(y+\sqrt{x^2+y^2})e^{\frac{y(y+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2}}$

同次形なので y=ux とおく　$y'=u+x\dfrac{du}{dx}$

$u+x\dfrac{du}{dx}=\sqrt{(1+u^2)}$　$x\dfrac{du}{dx}=\sqrt{(1+u^2)}-u$

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}-u}=(u+\sqrt{1+u^2})du$　$C_1+2\log x=u^2+2\int\sqrt{1+u^2}du=u^2+u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})$

$I=\int\sqrt{1+u^2}du$ の計算は $I=u\sqrt{1+u^2}-\int\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}udu$

$I-u\sqrt{1+u^2}=-\int\dfrac{-1+1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}du=-I+\int\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}du$　$2I=u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})$　となる

媒介変数 u を用いた解：　$x=C\sqrt{(u+\sqrt{1+u^2})e^{u^2+u\sqrt{1+u^2}}}$　$y=Cu\sqrt{C(u+\sqrt{1+u^2})e^{u^2+u\sqrt{1+u^2}}}$

x,y 表示した解：　$Cx^3=(y+\sqrt{x^2+y^2})e^{\frac{y(y+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2}}$

(8) $y'=e^{(xy'/y)}$　　　**解：**　$y=ex$　$y=\dfrac{e^{Cx}}{C}$

$y=e^t$　とおくと　$y'=\dfrac{dy}{dx}-e^t t'$

$p=t'$　とおいて原式に代入すると　$e^t p=e^{\frac{xp}{y}}$

対数をとって　$t+\log p=xp$　x　で微分して　$p+\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dx}=p+x\dfrac{dp}{dx}$

よって　$(\dfrac{1}{p}-x)\dfrac{dp}{dx}=0$

p=1/x の場合　$t=\log x+C_1$　$y=e^t=C_2x$

検算　$\dfrac{xy'}{y}=\dfrac{xC_2}{C_2x}=1$　$C_2=e^1=e$　$y=ex$

dp/dx=0 の場合　$p=C_1$　$t=C_1x+C_2$　$y=C_3e^{C_1x}$

検算　$\dfrac{xy'}{y}=x$　$C_1C_3\dfrac{e^{C_1x}}{C_3e^{C_1x}}=C_1x$　$C_3C_1e^{C_1x}=e^{C_1x}$　$c_3C_1=1$　$C_3=\dfrac{1}{C_1}$

解：　$y=\dfrac{e^{Cx}}{C}$

(9) $y'+y\,tanx=\sin 2x$ **解：** $y=-2\cos^2 x+C\cos x$

$$Q1(x)=e^{\int \tan x\,dx}=e^{-\log cosx}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{y}{\cos x}=C1+\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=C_1+\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=C_1-2\cos x$$

解： $y=-2\cos^2 x+C\cos x$

(10) $(1+x^2)y'=xy+1$ **解：** $y=x+C\sqrt{1+x^2}$

$$y'-\frac{xy}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\qquad Q1(x)=e^{\int\frac{-x}{1+x^2}dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=C_1+\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=C1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

解： $y=x+C\sqrt{1+x^2}$

(11) $2xy'+y+(x-1)y^2=0$ **解：** $y=\dfrac{1}{C\sqrt{x}+x+1}$

$$y'+\frac{y}{2x}=\frac{-x+1}{2x}y^2$$

ベルヌーイの微分方程式であるから　$z=y^{1-2}=\dfrac{1}{y}$　とおく

$$z=\frac{1}{y}\qquad z'=\frac{-1}{y^2}y'\quad z'-\frac{z}{2x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}\qquad Q1(x)=e^{\int-\frac{1}{2x}dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{x}}=C_1+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx=C_1+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad z=C_1\sqrt{x}+x+1$$

解： $y=\dfrac{1}{C\sqrt{x}+x+1}$

(12) $yy'^2+2xy'-y=0$ **解：** $y=\pm 2\sqrt{C(C+x)}$

y が 0 でない時、原式に y をかけると $(yy')^2+2x(yy')-y^2=0$

$z=\frac{y^2}{2}$ とおくと z’=yy’

$z'^2+2xz'-2z=0$ $2z=z'^2+2xz'$

これはダランベールの微分方程式であるから p=z’ とおいて　x で微分すると

2p=2pp’+2p+2xp’　2p’(p+x)=0

p’=0 のとき　$p=C_1$　$z=C_1x+C_2$　$z'=C_1$

$C_1^2+2xC1-2(C_1x+C_2)=C_1^2-2C_2=0$

従って　$C_2=\frac{C_1^2}{2}$　$y^2=2z=2C_1x+C_1^2$　$C_1=2C$ とおくと $y^2=4(cx+C^2)$

解：　$y=\pm 2\sqrt{C(C+x)}$

p+x=0 のとき　$z=-\frac{x^2}{2}+C_1$　$y^2=-x^2+C$　従って $x^2+y^2=0$

x=0 y=0　となるが　前提条件 y=0 でないに反するので解ではない

(13) $(x+1)y'^2-(x+y)y'+y=0$ **解：** $y=Cx+\frac{C^2}{C-1}$

p=y ‘とおくと $(x+1)p^2-(x+y)p+y=0$

x で微分すると $p^2+2(x+1)p'-(1+p)p-(x+y)p'+p=0$

$p'(2x+2-x-y)+p^2-p-p^2+p=0$

p’=0 のとき　$p=C_1$　$y=C_1x+C_2$

$(x+1)C_1^2-(x+C_1x+C_2)C_1+C_1x+C_2=C_1^2-C_1C_2+C_2=0$　$C_2=\frac{C_1^2}{C_1-1}$

解：　$y=Cx+\frac{C^2}{C-1}$

$(2x+2-x-y)=0$ の場合　$y=x+2$　であるから原式に代入すると

$(x+1)1^2-(x+x+2)1+x+2=1$　となるので階ではない

(14) $x+y'=2y+y'^2$ **解：** $(x-C)^2=C-2y$

p=y’ とすると $x+p=2y+p^2$　x で微分すると 1+p’=2p+2pp’

p’(2p-1)=-(2p-1) よって p’=-1

$p=-x+C_1$　$y=-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$

$x+(-x+C_1)=(-x^2+2C_1x+2C_2)+x^2-2C_1x+C_1^2¿=2C_2+C_1^2$

$2C_2=C_1-C_1^2$　$2y=-x^2+2C_1x+C_1-C_1^2=-(x-C_1)^2+C_1$

解：　$(x-C)^2=C-2y$

（15）　$yy'=x+y'^3$　　　**解：** $x=2p+\frac{Cp}{\sqrt{(p^2-1)}}$　$y=p^2+2+\frac{C}{\sqrt{(p^2-1)}}$

p=y' とすると　$yp=x+p^3$　x で微分すると　$p^2+yp'=1+3p^2p'$

$(3p^2-y)p'=p^2-1$　$(3p^2-y)p\frac{dp}{dy}=p^2-1$　$\frac{dy}{dp}=\frac{p(3p^2-y)}{p^2-1}$

$\frac{dy}{dp}+\frac{py}{p^2-1}=\frac{3p^3}{p^2-1}$　これは１階線型微分方程式であるから　$Q1(p)=e^{\int\frac{p}{p^2-1}dp}=\sqrt{p^2-1}$

$Q1(p)y=C+\int\frac{3p^3}{\sqrt{p^2-1}}=C+\int\frac{3p(p^2-1+1)}{\sqrt{p^2-1}}$

$=C+\int 3p\sqrt{p^2-1}\,dp+\int\frac{3p}{\sqrt{p^2-1}}dp=C+(p^2-1)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{p^2-1}$

解：$y=p^2+2+\frac{C}{\sqrt{(p^2-1)}}$　$x=yp-p^3=2p+\frac{Cp}{\sqrt{(p^2-1)}}$

（16）　$3x^2y'=2x^2+y^2$　　　**解：**　$y=x\frac{2+C\sqrt[3]{x}}{1+C\sqrt[3]{x}}$

x^2 で割って　$3y'=2+\frac{y^2}{x^2}$

同次型であるので　y=ux とおくと　y'=u+xu'

$3u+3xu'=2+u^2$　$3x\frac{du}{dx}=u^2-3u+2$　$\frac{dx}{x}=\frac{3du}{u^2-3u+2}=3du\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u-1}\right)$¿

$\log x=C1+3(\log(u-2)-\log(u-1))$　$x=C2\left(\frac{u-2}{u-1}\right)^3$

３乗根を取れば

$-C\sqrt[3]{x}=\frac{u-2}{u-1}=1-\frac{1}{u-1}$　$\frac{1}{u-1}=1+\sqrt[3]{x}$　$u=1+\frac{1}{1+C\sqrt[3]{x}}=\frac{2+C\sqrt[3]{x}}{1+C\sqrt[3]{x}}$

解：　$y=x\frac{2+C\sqrt[3]{x}}{1+C\sqrt[3]{x}}$

演習問題　3　　　29 ページ
次の微分方程式の一般解を求めよ

1..$(1+y^2)y''=2yy'^2$　　　　解：　$y=\tan(Ax+B)$　A B は任意定数

p=y’とおくと　$p'=p\dfrac{dp}{dy}$　　$(1+y^2)pp'=2yp^2$　　$(1+y^2)\dfrac{dp}{dy}=2yp$

$\dfrac{dp}{p}=\dfrac{2y}{1+y^2}dy$　　$\log p=C_1+\log(1+y^2)$　　$p=C_2(1+y^2)$　　$\dfrac{dy}{dx}=C_2(1+y^2)$　　$\tan^{-1}y=C_2x+C_3$

解：　$y=\tan(Ax+B)$　A B は任意定数

2..　$(y^2-1)(yy''+y'^2)=4y^2y'^2$　　　　解：　$y=\sqrt{\dfrac{x+A}{x+B}}$

$z=\dfrac{y^2}{2}$　とおくと　$z'=yy'$　　$z''=yy''+y'^2$　であるから

$(2z-1)z''=4z'^2$　　$p=z'$　とおくと

$(2z-1)\dfrac{dp}{dz}=4p$　　$\dfrac{dp}{p}=4\dfrac{dz}{2z-1}$　　$\log p=C_1+2\log(2z-1)$　　$p=C_2(2z-1)^2$

$\dfrac{dz}{dx}=C_2(2z-1)^2$　　$\dfrac{dz}{(2z-1)^2}=C_2dx$　　$\dfrac{1}{2z-1}=C_3x+C_4$

$y^2=2z=1+\dfrac{1}{C_3x+C_4}=\dfrac{C_3x+C_4+1}{C_3x+C_4}=\dfrac{x+B}{x+A}$

解：　$y=\sqrt{\dfrac{x+A}{x+B}}$

3..xyy’’=y’(xy’-y)　　　　解：　$y=Ax^B$

$y=e^t$　とおくと　$y'=y\dfrac{dt}{dx}$　　$y''=y\left(\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2+\dfrac{d^2t}{dx^2}\right)$　であるから

$xy^2\left(\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2+\dfrac{d^2t}{dx^2}\right)-xy^2\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2+y^2\dfrac{dt}{dx}=0$　　$x\dfrac{d^2t}{dx^2}+\dfrac{dt}{dx}=0$

$p=\dfrac{dt}{dx}$　とおくと　$x\dfrac{dp}{dx}+p=0$　　$\dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dx}{x}$　　$\log p=-\log x+c_1$　　$p=\dfrac{c_2}{x}$

$t=c_2\log x+c_3$　　$y=e^{\log x^{c_2}}e^{c_3}=Ax^B$

解：　$y=Ax^B$

4.. $y'y'''-2y''^2-y'y''=0$　　　　解：$y=Alog(e^{-x}+B)+C$

p=y'=dy/dx とおくと y'' y ''' は以下の通りになる

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}p \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=p\left((\frac{dp}{dy})^2+p\frac{d^2p}{dy^2}\right)$$

原式に代入して整理すると

$p^2\left(p\frac{d^2p}{dy^2}-(\frac{dp}{dy})^2-\frac{DP}{dy}\right)=0$　p=0　の時、　解１：y=C

$q=\frac{dp}{dy}$ とおくと $\frac{d^2p}{dy^2}=\frac{dq}{dp}q$ であるから

$$pq\frac{dq}{dp}=q^2+q \qquad pdq=(q+1)dp \qquad \frac{dq}{q+1}=\frac{dp}{p} \qquad q+1=C_1p$$

$$\mathrm{q}=\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}=\mathrm{C_1p-1} \quad \log(\mathrm{c_1p-1})=\mathrm{C_1y+C_2} \quad \mathrm{C_1p=C_1\frac{dy}{dx}=1+C_3e^{C_1y}} \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{1+C_3e^{C_1y}}}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{C_1}}$$

$$\frac{\mathrm{-C_1e^{-C_1y}dy}}{\mathrm{C_3+e^{-C_1y}}}=\mathrm{-C_1dx} \quad \log(\mathrm{C_3+e^{-C_1y}})=\mathrm{-C_1x+C_4} \quad \mathrm{C_3+e^{-C_1y}=C_5(e^{-x}+C_6)}$$

$$y=\frac{\log C_5}{-C_1}-(\frac{e^{-x}}{-C1})-\frac{C_6-C_3}{-C_1}=Alog(e^{-x}+B)+C$$

5.. $x^2y''=xy'+x^3y'^3$　　　　解：$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(Ax^2)+B$

$t=xy'$ とおくと $\frac{dt}{dx}=y'+xy''$ であるから 両辺に xy' を加えると

I　$x\frac{dt}{dx}=2t+t^3=t(t^2+2)$　　$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t(t^2+2)}=\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+2}\right)\frac{dt}{2}$

$$4\log x=\log\left(\frac{t^2}{t^2+2}\right)+c_9 \quad C_8x^4=\frac{t^2}{t^2+2} \quad \frac{1}{c_8x^4}=1+\frac{2}{t^2} \quad \frac{2}{t^2}=\frac{1-C_8x^4}{C_8x^4} \quad t^2=2\frac{C_8x^4}{1-C_8x^4}$$

$C_8=\frac{1}{A^2}$ とおくと $t^2=\frac{2x^4}{A^2-x^4}$　　$t=\pm\sqrt{2}\frac{x^2}{\sqrt{A^2-x^4}}$　　$y'=\pm\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{A^2-x^4}}$

$\pm\frac{y}{\sqrt{2}}-B=\int\frac{x}{\sqrt{A^2-x^4}}dx$　　$X^2=A\ sins$ とおくと $I=\int\frac{1}{2}\frac{Acoss}{Acoss}ds=\frac{1}{2}s=\sin^{-1}(Ax^2)$

解：$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(Ax^2)+B$

４…次の微分方程式の一般解および特異解を求めよ。

（1）　$yy'^2+y'(x-y)-x=0$　　　　解：$(y-x-C)(x^2+y^2-C)=0$

因数分解すれば　$(yy'+x)(y'-1)=0$

$yy'+x=0$　の場合　$ydy+xdx=0$　　$x^2+y^2=C$

y’-1=0 の場合 dy-dx=0　　y-x=C

２）　$y'^4=4y(xy'-2y)^2$　　　　解：　$y=C^2(x-C)^2$　　$y=\frac{x^4}{16}$　（特異解）

平方根を取れば　$y'^2=2(xy'-2y)\sqrt{y}$

$y=u^2$　とおけば　$y'=2uu'$ であるから

$4u^2u'^2=2u(2xuu'-2u^2)=4u^2(xu'-u)$　　$u'^2=xu'-u$

p=u’とおけば　$p^2=xp-u$　　x で微分すると　$2pp'=p+xp'-p$　　$p'(2p-x)=0$

p'=0 の場合　$p=C_1$　$u=C_1x+C_2$　$C_1^2-xC_1+C_1x+C2=0$　であるから　$c_2=-C_1^2$

$y=u^2=(Cx-C^2)^2=C^2(x-C)^2$

2p-x=0 の場合　$p=\frac{x}{2}$　$u=\frac{x^2}{4}+C_1$　$\frac{x^2}{4}-x\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+C_1=0$　$C_1=0$

$y=u^2=\frac{x^4}{16}$

（3）　$4xy'^2=(3x-1)^2$　　　　解：$(y-C)^2=x(x-1)^2$

平方根を取れば　$2y'\sqrt{x}=3x-1$　　$2y'=3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

$2y=2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2C$　　$y-C=\sqrt{x}(x-1)$

解：$(y-C)^2=x(x-1)^2$

演習問題　5

次の微分方程式の一般解を求めよ。

1.. $y''-a^2y=\sin ax$　　　　　**解：** $y=Ae^{ax}+Be^{-ax}-\frac{1}{2a^2}\sin ax$

一般解　$k^2-a^2=0$　$k=a,-a$　$y=C_1e^{ax}++C_2e^{-ax}$

特殊解　$y_s=c\sin ax+d\cos ax$ と仮定すると

$y_s'=ca\cos ax-da\sin ax$　$y_s''=-ca^2\sin ax-da^2\cos ax$

$y_s''-a^2y=-ca^2\sin ax-da^2\cos ax-a^2(c\sin ax+d\cos ax)$

$=-2da^2\cos ax-2ca^2\sin ax$

従って $c=-\frac{1}{2a^2}$　$d=0$　$y_s=-\frac{1}{2a^2}\sin ax$

別解：ヘビサイドの微分演算子法

$(D^2-a^2)y_s=\sin ax$　$y_s=\frac{e^{iax}}{D^2-a^2}$ の虚数部であるから

$y_s=e^{iax}\frac{1}{(D+ia)^2-a^2}$¿$=e^{iax}\frac{1}{(D^2+i2aD-2a^2)}=-\frac{1}{2a^2}(\cos ax+i\sin ax)$

$y_s=-\frac{\sin ax}{2a^2}$

解：$y=Ae^{ax}+Be^{-ax}-\frac{1}{2a^2}\sin ax$

2.. $y'''-y=xe^x$　　　　　解：$y=\left(A+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}\right)e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$k^3-1=0$　$(k-1)(k^2+k+1)=0$　$(k-1)\left((k+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)=0$

一般解　$y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2})x+c_3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2})x\right)$

特殊解　$y_s=e^x(ax^2+bx+c)$ と仮定する　(両辺に e^x があるので　x^2 の項があるはず)

$y_s'=e^x(ax^2+(2a+b)x+b+c)$　$y_s''=(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)$

$y_s'''=e^x(ax^2+(6a+b)x+6a+3b+c)$

$\frac{(y_s'''-y_s)}{e^x}=ax^2+(6a+b)x+6a+3b+c-(ax^2+bx+c)=6ax+6a+3b$　$a=\frac{1}{6}$　$b=-\frac{1}{3}$

$$y_s=e^x\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}\right)\quad y=\left(A+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}\right)e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

別解：ヘビサイドの微分演算子法

$y'''-y=xe^x$　$(D^3-1)y_s=xe^x$　$y_s=e^x\left(\frac{x}{(D+1)^3-1}\right)=e^x\left(\frac{x}{D(D^2+3D+3)}\right)$

$=\ e^x\left(\frac{x^2}{6(\frac{D^2}{3}+D+1)}\right)=\frac{e^x}{6}\left(x^2(1-D-\frac{D^2}{3}+D^2)\right)=e^x(\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{2}{9})$　$\frac{2}{9}e^x$　は一般解に含められる

$y_s=e^x\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}\right)$　$y=\left(A+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}\right)e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

3.. $x^3 y''' +^2 y'' + x y' - y = x$

解： $y=(A+\log x)x+\sqrt{x}\left(B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x)+C\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x)\right)$

$x=e^t$　$t=\log x$ とおくと $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)$

$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)$ であるから原式に代入して整理する　以後 $D=\frac{d}{dt}$ とすると

$(D^3-2D^2+2D-1)y=e^t$　$(D-1)(D^2-D+1)y=(D-1)\left((D-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)$ であるから

一般解： $y=C_1e^t+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

特殊解： $y_s=\frac{e^t}{(D-1)(D^2-D+1)}=e^t\frac{t}{D^2-D+1}=e^t\,t(1+D-D^2+D^2)=e^t(t+1)$

t を x に戻して

$y=(A+\log x)x+\sqrt{x}\left(B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x)+C\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x)\right)$

4.. $u'=v+w+xe^x$ ----------(1)

$v'=w+u+x$ -----------(2)

$w'=u+v+xe^{-x}$ ---------(3)

解： $u=Ae^{-x}+Ce^{2x}-\frac{e^x}{2}-\frac{2x-1}{4}-\frac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)$

$v=Be^{-x}+Ce^{2x}-e^x\frac{(2x+1)}{4}+\frac{2x-3}{4}-\frac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)$

$w=-(A+B)e^{-x}+Ce^{2x}-e^x\frac{(2x+1)}{4}-\frac{(2x-1)}{4}-e^{-x}\frac{(3x^2-x-1)}{9}$

$S=u+v+w$　$T=xe^x+x+xe^{-x}$ として、(1)+(2)+(3)　すると

$\frac{dS}{dx}=2S+T$　$(D-2)S=T$　一般解＝ $3Ce^{2x}$　(3C とするのはあとの計算を楽にするため)

特殊解＝ $\frac{T}{D-2}=e^x\frac{x}{D-1}+\frac{x}{D-2}+e^{-x}\frac{x}{D-3}=-e^x(x+1)-\frac{(2x+1)}{4}-e^{-x}\frac{(3x+1)}{9}$

よって　$S=3Ce^{2x}-e^x(x+1)-\frac{(2x+1)}{4}-e^{-x}\frac{(3x+1)}{9}$

(1)より $u'=S-u+xe^x$　$u'+u=S+xe^x$　一般解＝ e^{-x}

特殊解＝ $\dfrac{1}{D+1}\left(3Ce^{2x}-e^{x}-\dfrac{(2x+1)}{4}-e^{-x}\dfrac{(3x+1)}{9}\right)=Ce^{2x}-\dfrac{e^{x}}{2}-\dfrac{2x+1}{4(1+D)}-e^{-x}\dfrac{(3x+1)}{9D}$

$= Ce^{2x}-\dfrac{e^{x}}{2}-\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)$

よって $u=Ae^{-x}+Ce^{2x}-\dfrac{e^{x}}{2}-\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)$

(1)より　$v'=S-v+x$　　$v'+v=S+x$　一般解＝ e^{-x}　　特殊解＝

$\dfrac{1}{D+1}\left(3Ce^{2x}-e^{x}(x+1)+\dfrac{(2x-1)}{4}-e^{-x}\dfrac{(3x+1)}{9}\right)=Ce^{2x}-e^{x}\dfrac{x+1}{2+D}+\dfrac{2x-1}{4(1+D)}-e^{-x}\dfrac{(3x+1)}{9D}$

$= C\,e^{2x}-e^{x}\dfrac{(2x+1)}{4}+\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)$

よって $v=Be^{-x}+Ce^{2x}Ce^{2x}-e^{x}\dfrac{(2x+1)}{4}+\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)$

w=S-u-v=　$3Ce^{2x}-e^{x}(x+1)-\dfrac{(2x+1)}{4}-e^{-x}\dfrac{(3x+1)}{9}$

$-\left(Ce^{2x}+Ae^{-x}-\dfrac{e^{x}}{2}-\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)\right)$

$-\left(Be^{-x}+C\,e^{2x}-e^{x}\dfrac{(2x+1)}{4}+\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{e^{-x}}{18}(3x^2+2x)\right)$

$w=-(A+B)e^{x}+Ce^{2x}-e^{x}\dfrac{(2x+1)}{4}-\dfrac{(2x-1)}{4}-e^{-x}\dfrac{(3x^2-x-1)}{9}$

5..　y''+z=sin x -----(1)
　　y+z''=cos x ---(2)

解：　$y=Ae^{x}+Be^{-x}+(C-\frac{x}{4})cosx+(D+\frac{x}{4})\sin x$

解：　$z=-Ae^{x}-Be^{-x}+\cos x(C-\frac{1}{2}-\frac{x}{4})+\sin x(-D+\frac{1}{2}+\frac{x}{4})$

1 式を 2 階微分し z''を代入すると

$Y''''-y=-\sin x-\cos x$

一般解　$k^{4}-1=(k-1)(k+1)(k^{2}+1)=0$　より

$y=Ae^{x}+Be^{-x}+C\cos x+D\sin x$

特殊解の計算　$\frac{-sinx-cosx}{D^{4}-1}=\frac{-e^{ix}}{D^{4}-1}$　の実数部と虚数部の和であるから

$$y_{s}=\frac{-e^{ix}}{D^{4}-1}=-e^{ix}\frac{1}{(D+i)^{4}-1}=-e^{ix}\frac{1}{D^{4}+i4D^{3}+i^{2}6D^{2}+i^{3}4D+1-1}=-i\frac{e^{ix}}{4D}\frac{1}{1-i\frac{3}{2}D}=-i\frac{e^{ix}}{4}x(1+i\frac{3}{2}D)$$

$$=\quad -\frac{1}{4}(i\cos x-\sin x)(x+i\frac{3}{2})=-\frac{1}{4}\left(-x\,sinx-\frac{3}{2}cosx+i\left(x\,cosx-\frac{3}{2}sinx\right)\right)$$

$=\quad \frac{x\,sinx}{4}-\frac{x\,cosx}{4}+\frac{3}{8}cosx+\frac{3}{8}sinx$　　$\frac{3}{8}\cos x$　$\frac{3}{8}\sin x$　は一般解に含まれるので省略して

$y_{s}=\frac{x\,sinx}{4}-\frac{x\,cosx}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}x\sin(x-\frac{\pi}{4})$　となる

検算　$y_{s}'=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin(x-\frac{\pi}{4})+x\cos(x-\frac{\pi}{4})\right)$　　$y_{s}''=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(2\cos(x-\frac{\pi}{4})-x\sin(x-\frac{\pi}{4})\right)$

$y_{s}'''=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-3\sin(x-\frac{\pi}{4})-x\cos(x-\frac{\pi}{4})\right)$　　$y_{s}''''=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-4\cos(x-\frac{\pi}{4})+x\sin(x-\frac{\pi}{4})\right)$

よって　$y_{s}''''-y_{s}=\frac{\sqrt{2}}{4}(-4\cos(x-\frac{\pi}{4}))=-\sqrt{2}(cosx\cos\frac{\pi}{4}+sinx\sin\frac{\pi}{4})=-cosx-sinx$　＝右辺

解：　$y=Ae^{x}+Be^{-x}+(C-\frac{x}{4})cosx+(D+\frac{x}{4})\sin x$

$$y'=Ae^{x}-Be^{-x}-Csinx+Dcosx+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sin(x-\frac{\pi}{4})+xcos(x-\frac{\pi}{4})\right)$$

$$y''=Ae^{x}+Be^{-x}-Ccosx-Dsinx+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(2\cos(x-\frac{\pi}{4})-xsin(x-\frac{\pi}{4})\right)$$

$$z-sinx+Ae^{x}+Be^{-x}-C\cos x-D\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{4}x\sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{4}x(sinx-cosx)$$

$$z=-Ae^{x}-Be^{-x}+\cos x(C-\frac{1}{2}-\frac{x}{4})+\sin x(-D+\frac{1}{2}+\frac{x}{4})$$